Examen VWO

2016

tijdvak 1
woensdag 18 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Aalscholvers en vis

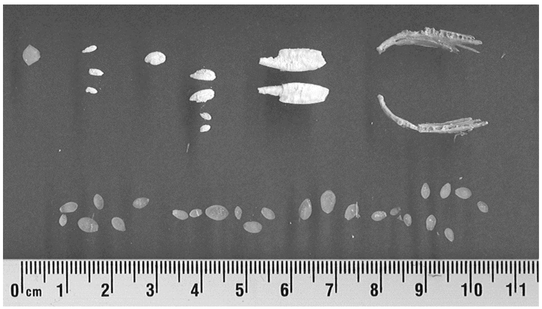
In het IJsselmeergebied leven veel aalscholvers. Deze vogels voeden zich met vis. Zij zijn daarom een concurrent voor de visserij in het IJsselmeergebied.
In de periode 1997-2001 is uitgebreid onderzoek gedaan naar de visconsumptie van aalscholvers. Hiervoor werden braakballen van aalscholvers geanalyseerd.

Uit het braakballenonderzoek bleek dat een volwassen aalscholver ongeveer 360 gram vis per dag at en een jong ongeveer 285 gram per dag.
In juni 1999 zijn er in het IJsselmeergebied 30 012 volwassen en 6961 jonge aalscholvers geteld. We gaan ervan uit dat die aantallen voor de gehele maand golden.

3p **1** Bereken hoeveel kg vis er in die maand door de aalscholvers gegeten is. Rond je antwoord af op duizendtallen.

Eén keer per dag braakt een aalscholver een bal uit met alle onverteerbare resten van de vissen die hij die dag gegeten heeft. In zo'n braakbal zitten onder andere otolieten (gehoorsteentjes) en kauwplaatjes van verschillende vissoorten (zie foto). Deze worden gesorteerd op vissoort en de lengtes worden gemeten.

foto



Met behulp van formules kan men dan de lengte en het gewicht berekenen van de vissen waarvan ze afkomstig zijn. Zo wordt vastgesteld wat de aalscholver die dag gegeten heeft.

In de tabel staan de gebruikte formules voor twee belangrijke vissoorten die op het menu staan van de aalscholver.

tabel

vissoort	formule voor de lengte	formule voor het gewicht
pos	$L = -11{,}31 + 22{,}14 \cdot O$	$\ln(G) = -12{,}911 + 3{,}335 \cdot \ln(L)$
blankvoorn	$\ln(L) = 3{,}896 + 0{,}734 \cdot \ln(K)$	$\ln(G) = -13{,}431 + 3{,}396 \cdot \ln(L)$

In deze formules is O de gemeten otolietlengte in mm, K de gemeten kauwplaatlengte in mm, L de lengte van de vis in mm en G het gewicht van de vis in gram.

In een braakbal wordt een otoliet van een pos aangetroffen. Deze otoliet heeft een lengte van 3,4 mm.

4p **2** Bereken het gewicht van deze pos. Geef je antwoord in gram in één decimaal nauwkeurig.

Voor de blankvoorn kunnen we de twee formules in de tabel herleiden tot één formule waarmee we het gewicht van deze vis uit de kauwplaatlengte kunnen berekenen.

3p **3** Stel een formule op waarmee het gewicht G van de blankvoorn wordt uitgedrukt in de kauwplaatlengte K.

Bij de blankvoorn is het verband tussen kauwplaatlengte en de lengte van de vis in de tabel anders te schrijven: de formule $\ln(L) = 3{,}896 + 0{,}734 \cdot \ln(K)$ is te herleiden tot

$$L = 49{,}2 \cdot K^{0{,}734}$$

Aan de exponent 0,734 in deze formule kunnen we zien dat de lengte van de vis steeds minder sterk toeneemt bij toenemende kauwplaatlengte. Dat kun je ook met behulp van de afgeleide nagaan.

4p **4** Stel een formule op voor de afgeleide van L en laat met behulp hiervan zien dat de lengte van de blankvoorn steeds minder sterk toeneemt bij toenemende kauwplaatlengte.

Fietsen en energie

De formules voor het **basisenergieverbruik**, de energie die iemand per dag nodig heeft voor alle activiteiten van een lichaam in rust, zoals hartwerking, ademhaling, enzovoort, staan in tabel 1. In deze formules is B het basisenergieverbruik in kcal (kilocalorieën) per dag en G het lichaamsgewicht van de persoon in kg.

tabel 1

basisenergieverbruik

leeftijdsgroep	**formule**
18-30 jaar (jongvolwassen)	$B = 15,3G + 679$
31-60 jaar (ouder)	$B = 11,6G + 879$

Er gelden verschillende formules voor jongvolwassen en voor oudere personen. We vragen ons af welke van deze twee groepen het laagste basisenergieverbruik heeft. Dit hangt volgens de formules in tabel 1 af van het lichaamsgewicht van een persoon.

4p **5** Onderzoek bij welke lichaamsgewichten tussen 40 en 120 kg de jongvolwassenen een lager basisenergieverbruik hebben dan de ouderen.

Als iemand sport, is de totale energie die hij of zij nodig heeft groter dan het basisenergieverbruik. De formule voor de totale energie T per dag is $T = 1,3B + S$. Hierbij is B het basisenergieverbruik per dag en S het energieverbruik voor het sporten per dag zoals fietsen, zwemmen en hardlopen.
In tabel 2 staat het energieverbruik in kcal per kg lichaamsgewicht per uur bij fietsen bij een aantal snelheden. Neem aan dat het energieverbruik **tussen** de aangegeven snelheden in lineair verloopt.

tabel 2

energieverbruik bij fietsen

snelheid (km/uur)	14	17	20	24	28	35	42
energieverbruik (kcal/kg/uur)	4	6	8	10	12	16	20

Frits is 58 jaar en weegt 70 kg. Hij doet mee aan de fietselfstedentocht in Friesland, een tocht waarbij op één dag 240 km gefietst wordt. We nemen aan dat hij de hele tocht rijdt met een snelheid van 25 km/uur.

4p **6** Bereken het totale energieverbruik van Frits op deze dag.

Bij een hogere snelheid wordt per uur een grotere afstand afgelegd. Je kunt voor elke snelheid die in tabel 2 vermeld wordt, het energieverbruik per kg lichaamsgewicht bij het fietsen per afgelegde kilometer berekenen. Alex beweert dat dit voor elke snelheid gelijk is. Bert zegt dat dit hoger is bij hogere snelheden en Carolien beweert dat dit lager is bij hogere snelheden. Eén van deze drie personen heeft gelijk.

4p **7** Onderzoek met behulp van tabel 2 wie van de drie gelijk heeft.

Bij een triatlon wordt er achtereenvolgens gezwommen, gefietst en hardgelopen. Er zijn veel verschillende afstanden mogelijk voor de drie onderdelen. Zo bestaat de Ironman − ook wel de hele triatlon genoemd − uit een zwemonderdeel van 3800 m, een fietsonderdeel van 180 km en een hardlooponderdeel van 42,2 km. De Olympische triatlon echter, gaat over 1500 m zwemmen, 40 km fietsen en 10 km hardlopen.

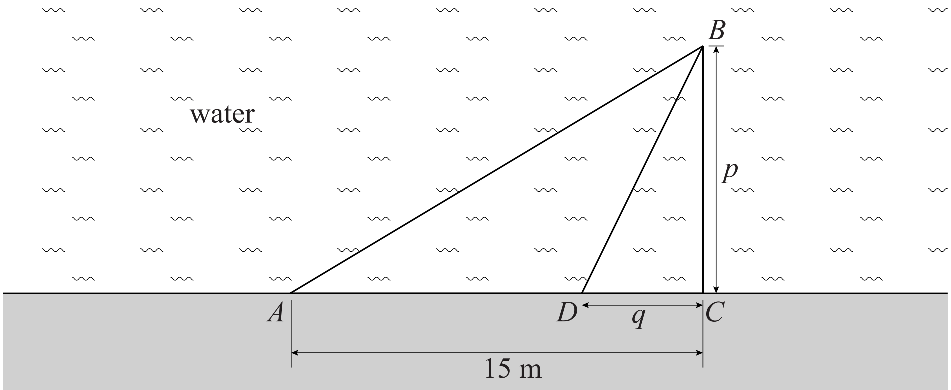
Je zou een triatlon kunnen samenstellen waarbij voor elk onderdeel het energieverbruik voor het sporten even groot is. We gaan daarbij uit van een atleet die met een dusdanige snelheid hardloopt, dat zijn energieverbruik 1 kcal per afgelegde kilometer is. De atleet zwemt met een snelheid waarbij zijn energieverbruik 4 kcal per km is. En hij fietst met een snelheid waarbij hij 0,4 kcal per km verbruikt. De genoemde waarden voor het energieverbruik gelden steeds per kg lichaamsgewicht.

5p **8** Bereken de afstanden voor het zwemmen, fietsen en hardlopen in een triatlon van in totaal 21 km waarbij het energieverbruik van deze atleet voor elk onderdeel steeds even groot is.

Elvis

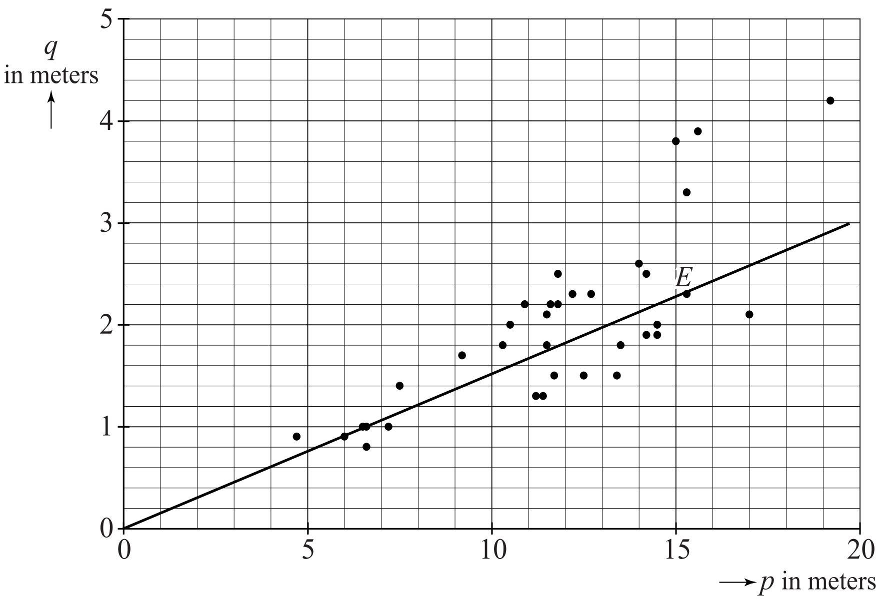
De Amerikaan T.J. Pennings heeft onderzocht hoe snel zijn hond Elvis een weggegooide bal bereikt. In figuur 1 staat een schets van het bovenaanzicht van de situatie. Pennings en Elvis staan bij het vaste punt A. Het vaste punt C bevindt zich 15 meter verderop langs de waterkant. Pennings gooit een bal in het water, zodanig dat deze ergens op de denkbeeldige lijn door C loodrecht op de waterkant terechtkomt; het punt waar de bal terechtkomt, noemen we B. De afstand BC, uitgedrukt in meters, noemen we p.

figuur 1



Elvis bepaalt zelf het punt vanaf waar hij gaat zwemmen. Dat punt noemen we D. Dus Elvis rent van A naar D langs de waterkant en zwemt vervolgens van D naar B.
Pennings doet dit experiment 35 keer[1)], waarbij hij de afstand p steeds varieert. Bij elke worp noteert hij p en de afstand CD. Deze afstand CD, uitgedrukt in meters, noemen we q. De waarden van p en q heeft Pennings uitgezet in figuur 2: elk punt hoort bij een worp.

figuur 2



noot 1 Eigenlijk gooide Pennings wel vaker dan 35 keer, maar alle keren waarbij hij er niet in slaagde om de bal ter hoogte van C te gooien, schrapte hij uit zijn waarnemingen.

Zo lees je af dat bij een van de worpen geldt: $p = 15,3$ en $q = 2,3$ (zie punt E). Dat betekent dat Elvis 2,3 meter voor punt C in het water springt.
Uit figuur 2 blijkt dat de punten bij benadering op een rechte lijn door (0,0) liggen. Dat betekent dat q recht evenredig is met p.
Op basis van deze recht evenredigheid kan men de volgende conclusies trekken:

1 Hoe verder van punt C de bal in het water komt, hoe eerder Elvis het water in springt.
2 Als de afstand CB twee keer zo klein wordt, wordt de afstand AD ook twee keer zo klein.

4p **9** Geef van elk van de beide bovenstaande conclusies aan of deze volgt uit het recht evenredige verband. Licht je antwoord toe.

De vergelijking van de rechte lijn uit figuur 2 is bij benadering $q = 0,2p$.
Hierin is de richtingscoëfficiënt 0,2 een grove benadering.

3p **10** Bereken de waarde van de richtingscoëfficiënt van deze lijn in twee decimalen nauwkeurig met behulp van figuur 2.

Het is ook mogelijk het gedrag van Elvis theoretisch te bekijken. Hierover gaat de rest van de opgave.
De afstand AC is 15 meter en de afstand BD is volgens de stelling van Pythagoras gelijk aan $\sqrt{p^2 + q^2}$. We nemen bovendien aan dat Elvis met een constante snelheid van 7 m/s rent en met een constante snelheid van 1 m/s zwemt.

Voor elke worp kunnen we de totale tijd die Elvis nodig heeft om de bal te bereiken, berekenen met de formule:

$$T = 0,143 \cdot (15 - q) + \sqrt{p^2 + q^2}$$

Hierin is T de totale tijd in seconden en q de afstand CD in meters.

Voor de volgende vraag bekijken we een worp waarbij de afstand $CB = 20$ m, dus $p = 20$. De formule wordt dan:

$$T = 0,143 \cdot (15 - q) + \sqrt{400 + q^2}$$

De afgeleide van deze formule is:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q} = -0,143 + \frac{q}{\sqrt{400 + q^2}}$$

5p **11** Toon met behulp van differentiëren aan dat deze afgeleide juist is en bereken door deze afgeleide gelijk aan 0 te stellen, na hoeveel meter rennen Elvis het water in moet springen om zo snel mogelijk de bal te bereiken.

We gaan nu weer uit van de formule $T = 0{,}143 \cdot (15 - q) + \sqrt{p^2 + q^2}$ en we bekijken $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q}$. Er geldt:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q} = -0{,}143 + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

4p **12** Laat zien dat door deze afgeleide gelijk aan 0 te stellen de vergelijking $q = 0{,}14p$ ontstaat, waarbij 0,14 is afgerond op twee decimalen.

Geocachen

Geocachen is een activiteit waarbij je verborgen schatten zoekt. Vrijwilligers verstoppen een klein kistje - een zogeheten geocache op een bepaalde plaats - en publiceren de coördinaten van de betreffende plaats op internet. De geocachers kunnen daarna de geocache zoeken met behulp van een gps-systeem. Deze activiteit ontstond in 2000 in de Verenigde Staten en heeft sindsdien een hoge vlucht genomen. In deze opgave bekijken we hoe het aantal op internet gepubliceerde geocaches groeide. In de tabel zie je de aantallen voor de periode 2000-2011.

tabel

datum	**aantal geocaches**
3 mei 2000	1
1 januari 2007	500 000
15 maart 2010	1 000 000
27 augustus 2011	1 500 000

De groei van het aantal geocaches was spectaculair. Een eerste model om het aantal geocaches te beschrijven is als volgt:

$$N(t) = {}^{4}\log\left(\frac{13}{13 - t}\right)$$

Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2000 en N het aantal geocaches in miljoenen.

3p **13** Bereken hoeveel het aantal geocaches dat dit model oplevert voor 1 januari 2007 afwijkt van het werkelijke aantal. Rond je antwoord af op duizendtallen.

Om te berekenen op welk moment een bepaald aantal geocaches bereikt is, kun je dit model omschrijven tot een formule van de vorm:

$$t = a - b \cdot c^{-N}$$

4p **14** Bereken de waarden van de constanten a, b en c.

Hoewel dit eerste model redelijk paste voor de periode 2000-2011, is het nu niet meer bruikbaar.

2p **15** Leg uit hoe je aan de formule van het eerste model ziet, dat dit model nu niet meer bruikbaar is.

Na 2011 was de groei van het aantal geocaches minder spectaculair. Dit was mede aanleiding om het model bij te stellen. Hieruit kwam het tweede model voort:

$$M(t) = \frac{5{,}6}{1 + 87 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3t}}$$

Ook hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2000 en M het aantal geocaches in miljoenen. M is stijgend, dus het aantal geocaches wordt groter naarmate t groter wordt.

Je kunt met behulp van alleen de formule voor $M(t)$, dus zonder te differentiëren of gebruik te maken van de grafiek, beredeneren dat de stijging van het aantal geocaches op den duur heel klein wordt.

4p **16** Geef zo’n redenering.

Golvende muur

Op de foto zie je een gedeelte van een muur met een golvende bovenkant. In totaal zijn er zes golven. Elke golf begint en eindigt op een laagste punt. De afstand tussen die twee laagste punten noemen we de **lengte** van de golf. Elke golf is een factor 1,4 langer dan de vorige, maar de hoogte van de golven blijft gelijk.

foto

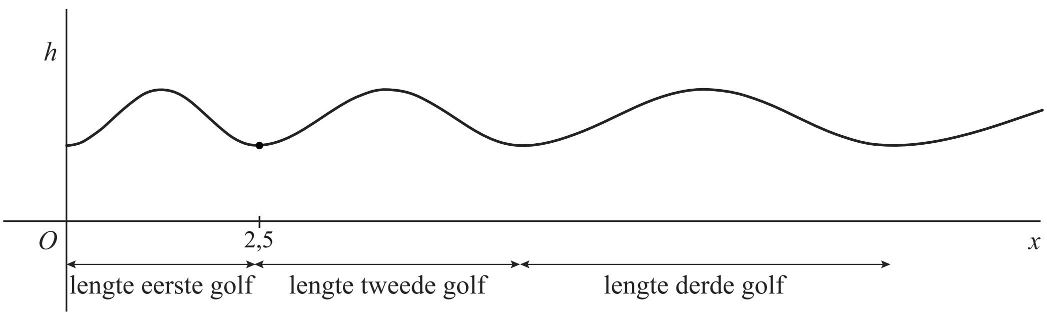
De zes golven zijn elk bij benadering te beschrijven met (een deel van) een sinusoïde. Voor de golvende muur loopt een weg. Deze weg loopt op de foto naar beneden, maar voor het wiskundige model gaan we ervan uit dat de weg horizontaal loopt. In het model begint elke golf op dezelfde hoogte als de eerste golf.

Voor de eerste golf kan men de volgende formule opstellen:

$$h = 1{,}37 + 0{,}37\sin\left(\frac{2\pi}{2{,}5}(x - 0{,}625)\right)$$

Hierin is h de hoogte van de golf boven de grond in meters en x de horizontale afstand in meters vanaf het beginpunt van de eerste golf met $0 \le x \le 2{,}5$. Zie de figuur. In de figuur zijn ook de tweede, de derde en een deel van de vierde golf getekend.

figuur



2p **17** Bereken het hoogteverschil tussen het hoogste en het laagste punt van de eerste golf.

Omdat de lengte van een volgende golf steeds met een factor 1,4 vermenigvuldigd wordt, kan de lengte van de golven gegeven worden door een meetkundige rij met als directe formule:

$$L_n = 2{,}5 \cdot 1{,}4^{n-1}$$

Hierin is L_n de lengte in meters van de golf met rangnummer n. De eerste golf heeft het nummer $n = 1$.

De tweede golf is even hoog als de eerste.

5p **18** Stel een formule op voor de sinusoïde die de tweede golf beschrijft, waarin h de hoogte van de golf boven de grond is in meters en x de horizontale afstand in meters vanaf het beginpunt van de eerste golf.

3p **19** Bereken de lengte van de zes golven samen. Rond je antwoord af op gehele cm.

Als er niet zes, maar veel meer van dergelijke golven zijn, is het handig om een formule op te stellen voor de som van de lengtes van de golven. Omdat de lengtes van de golven een meetkundige rij vormen, kun je hiervoor gebruikmaken van de formule voor de som van de eerste n termen van een meetkundige rij:

$$S_n = \frac{\text{eerste term} \cdot \left(\text{factor}^n - 1\right)}{\text{factor} - 1}$$

Hiermee kan een formule worden opgesteld voor de lengte S_n van n golven samen.
Deze formule is vervolgens te herleiden tot de vorm:

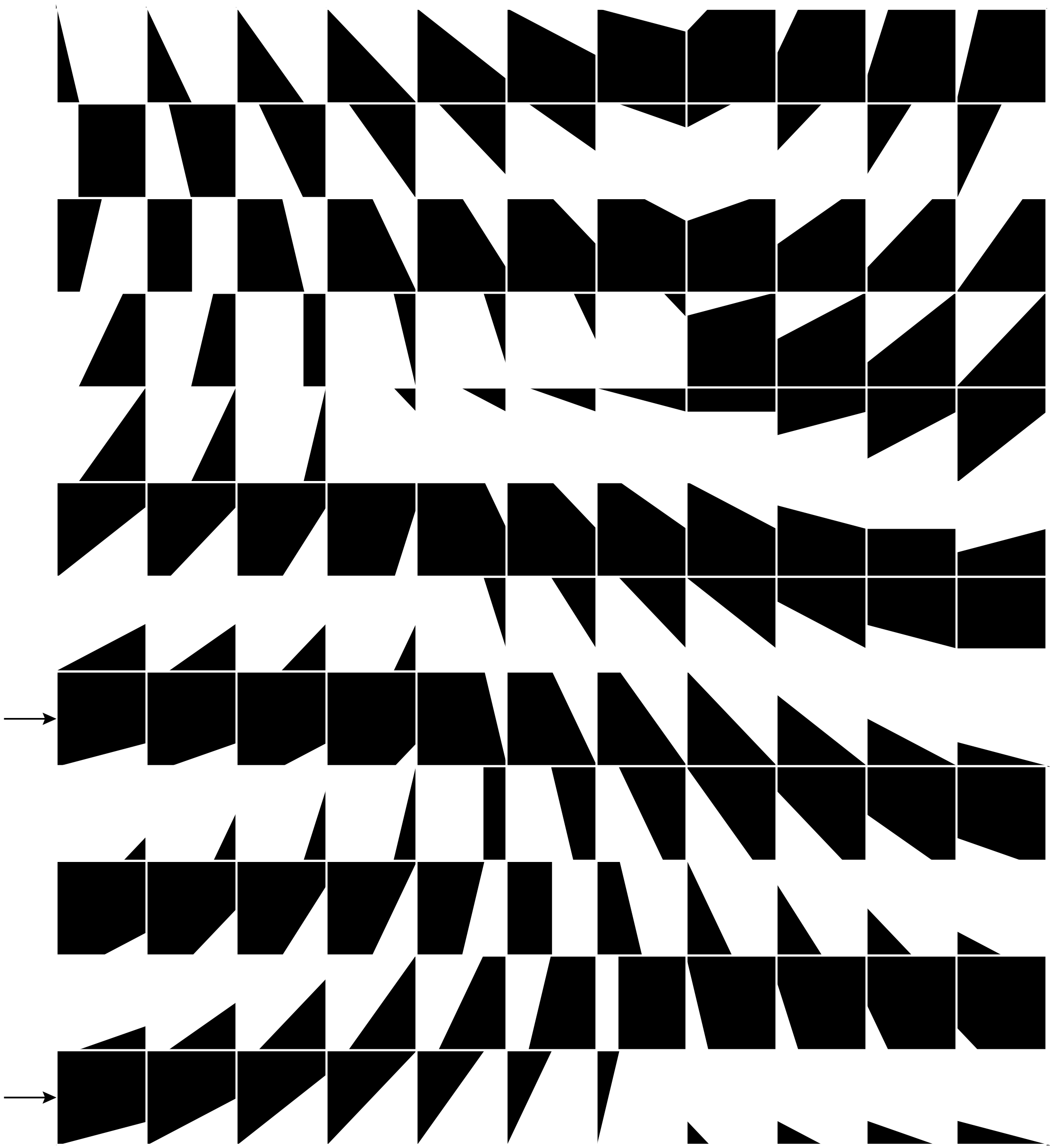
$$S_n = a \cdot 1{,}4^n + b$$

4p **20** Voer deze herleiding uit en geef de waarden van a en b in deze formule in twee decimalen nauwkeurig.

Zwart-wit

Veel kunst is samengesteld uit regelmatige patronen. Vormgever Wim Crouwel heeft de serie Tide gemaakt. In de werken uit die serie komt een beeld naar voren, dat is opgebouwd uit telkens veranderende vierkantjes. Zie figuur 1.

figuur 1

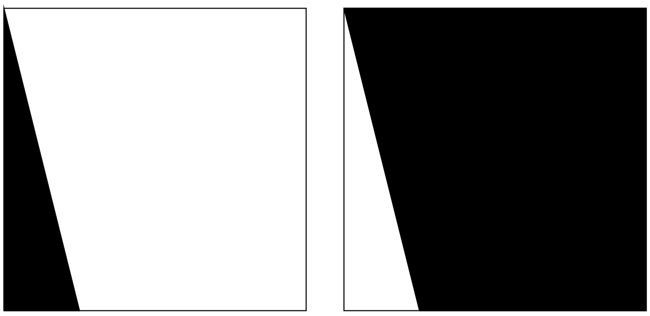


Als je het werk goed bekijkt, zie je dat het bestaat uit vierkantjes die elk door middel van een lijnstukje in een zwart en een wit deel worden verdeeld. Helemaal zwarte of helemaal witte vierkantjes komen niet voor.

In figuur 1 zijn ($11 \times 12 =$) 132 vierkantjes getekend. Maar er zitten dubbele in: bijvoorbeeld het eerste vierkantje op de achtste rij en het eerste vierkantje op de twaalfde rij. Zie de pijltjes in figuur 1.

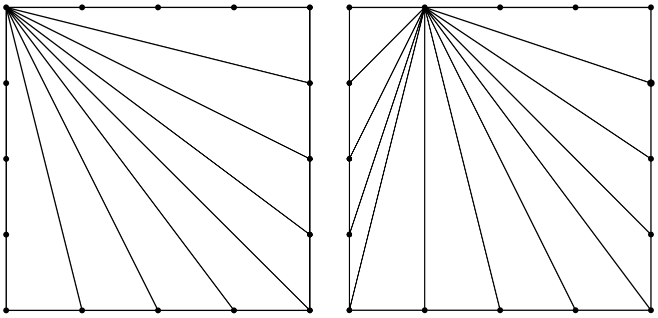
Het is niet zo snel te zien of van elk vierkantje de versie met zwart en wit verwisseld ook voorkomt, zoals in de twee verschillende vierkantjes in figuur 2.

figuur 2



De vierkantjes zijn 20 cm bij 20 cm groot. De lijnstukjes lopen telkens van een punt op een zijde naar een punt op een andere zijde. De punten op de zijden liggen 5 cm uit elkaar. In figuur 3 staan alle mogelijke lijnstukjes vanuit het punt linksboven en vanuit het punt 5 cm naar rechts.

figuur 3



7p **21** Bereken hoeveel verschillende vierkantjes er kunnen worden gemaakt.